9:15
a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

Cílem je vyšetřit monotonii, spočítáme první derivaci

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 6x + 10}} \cdot (2x - 6) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}} \,.$$

Řešením rovnice $f'(x) = 0$ získáme $x = 3$, což je podezřelý bod (extrém nebo inflexní bod). K vyšetření monotonie potřebujeme všechny nulové body derivace. Diskriminant výrazu pod odmocninou je však vždy záporný ($b^2 - 4ac = 36 - 40 = -4$) a výraz je tedy vždy kladný. Jediným nulovým bodem je tedy $x = 3$. Ten nám rozděluje číselnou osu na intervaly $(-\infty, 3)$ a $(3, +\infty)$. Vyšetříme znaménko f' v těchto intervalech

$$\begin{array}{lll} (-\infty, 3) & \text{vezmi např. } x = 2 & f' < 0\,, \\ (3, +\infty) & \text{vezmi např. } x = 4 & f' > 0\,. \end{array}$$

Vidíme, že $x = 3$ je zřejmě lokální minimum (klesáme, pak rosteme). Na otázku, zda-li se jedná o minimum globální si odpovíme hledáním limit v $\pm\infty$, tedy

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2 - 6x + 10} = \lim_{x \to \pm\infty} |x| \sqrt{1 - \frac{6}{x} + \frac{10}{x^2}} = +\infty \,.$$

kde jsme při vytýkání x^2 zpod odmocniny použili $\sqrt{x^2} = |x|$. Vidíme, že obě limity jdou do plus nekonečna, nikde nejdeme do mínus nekonečna, a proto je $x = 3$ i globálním minimem. Na závěr nalezněme ještě $y-$novou souřadnici tohoto minima, tedy $f(3) = 1$.

Shrnutí: funkce $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$ má globální minimum v bodě $[3, 1]$, klesá na intervalu $(-\infty, 3)$ a roste na intervalu $(3, +\infty)$.

11:00
a) $f(x) = (x - 1)\mathrm{e}^{3-x}$

Cílem je vyšetřit monotonii, spočítáme první derivaci (pozor, derivujeme součin funkcí), tedy

$$f'(x) = \mathrm{e}^{3-x}(-1) \cdot (x - 1) + \mathrm{e}^{3-x} \cdot 1 = \mathrm{e}^{3-x}\,(-x + 1 + 1) = \mathrm{e}^{3-x}(2 - x)\,.$$

Řešením rovnice $f'(x) = 0$ získáme $x = 2$ (exponenciála je vždy kladná, nikdy nemůže být nulová), což je podezřelý bod. K vyšetření monotonie potřebujeme všechny nulové body derivace. Protože jak jsme již argumentovali, exponenciála je vždy kladná, žádný další nulový bod není. Jediným nulovým bodem je tedy $x = 2$. Ten nám rozděluje číselnou osu na intervaly $(-\infty, 2)$ a $(2, +\infty)$. Vyšetříme znaménko f' v těchto intervalech

$$\begin{array}{lll} (-\infty, 2) & \text{vezmi např. } x = 1 & f' > 0\,, \\ (2, +\infty) & \text{vezmi např. } x = 3 & f' < 0\,. \end{array}$$

Vidíme, že $x = 2$ je zřejmě lokální maximum (rosteme, pak klesáme). Na otázku, zda-li se jedná o maximum globální si odpovíme hledáním limit v $\pm\infty$, tedy

$$\lim_{x \to +\infty} (x - 1)\mathrm{e}^{3-x} = +\infty \cdot 0\,.$$

Toto je nedefinovaný výraz ($e^{-\infty}$ jde do nuly!). Použijeme L'hospitala, výraz však do použitelného tvaru nejdříve musíme upravit (L'hospital lze použití jen pro limity typu $0/0$ nebo ∞/∞ rsp. a/∞ s $a \in \mathbb{R}$), potom

$$\lim_{x \to +\infty} (x - 1)\mathrm{e}^{3-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{\mathrm{e}^{x-3}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{x-3}} = 0\,.$$

A potom limita v mínus nekonečnu

$$\lim_{x \to -\infty} (x - 1)\mathrm{e}^{3-x} = -\infty \cdot \infty = -\infty\,.$$

Protože směrem do $+\infty$ se blížíme asymptoticky k nule a ve směru $-\infty$ divergujeme do $-\infty$, tak je $x = 2$ zároveň globálním maximem. Na závěr nalezněme ještě $y-$novou souřadnici tohoto maxima, tedy $f(2) = \mathrm{e}$.

Shrnutí: funkce $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{3-x}$ má globální maximum v bodě $[2, \mathrm{e}]$, roste na intervalu $(-\infty, 2)$ a klesá na intervalu $(2, +\infty)$.