9:15

a) $f(x) = -3x^2 - 12x + 15$

Identifikujeme koeficienty kvadratické rovnice $a = -3$, $b = -12$ a $c = 15$. Průsečík s osou y určíme okamžitě jako $P_y = [0, c] = [0, 15]$. Průsečíky s osou x nalezneme jako kořeny kvadratické funkce, tj. řešíme kvadratickou rovnici

$$-3x^2 - 12x + 15 = 0\,,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 15}}{2 \cdot (-3)} = \begin{cases} x_1 = \frac{12+18}{-6} = -5 \\ x_2 = \frac{12-18}{-6} = 1 \end{cases}$$

Průsečíky s osou x jsou tedy $P_{x_1} = [-5, 0]$ a $P_{x_2} = [1, 0]$ a kvadratickou funkci tedy lze rozložit jako $-3x^2 - 12x + 15 = -3(x + 5)(x - 1)$.

Souřadnice vrcholu $[x_v, y_v]$ získáme následovně; x-ovou získáme např. jako aritmetický průměr našich kořenů, tzn. $x_v = (-5 + 1)/2 = -2$ a tuto hodnotu dosadíme do předpisu funkce $f(x)$, tedy

$$y_v = f(x_v) = -3(-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 15 = 27\,.$$

Souřadnice vrcholu kompaktně tedy $V = [-2, 27]$.

11:00

a) $f(x) = 2x^2 + 20x + 42$

Identifikujeme koeficienty kvadratické rovnice $a = 2$, $b = 20$ a $c = 42$. Průsečík s osou y určíme okamžitě jako $P_y = [0, c] = [0, 42]$. Průsečíky s osou x nalezneme jako kořeny kvadratické funkce, tj. řešíme kvadratickou rovnici

$$2x^2 + 20x + 42 = 0\,,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 2 \cdot 42}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-20+8}{4} = -3 \\ x_2 = \frac{-20-8}{4} = -7 \end{cases}$$

Průsečíky s osou x jsou tedy $P_{x_1} = [-3, 0]$ a $P_{x_2} = [-7, 0]$ a kvadratickou funkce tedy lze rozložit jako $2x^2 + 20 + 42 = 2(x + 7)(x + 3)$. Souřadnice vrcholu $[x_v, y_v]$ získáme následovně; x-ovou získáme např. jako aritmetický průměr našich kořenů, tzn. $x_v = (-3 - 7)/2 = -5$ a tuto hodnotu dosadíme do předpisu funkce $f(x)$, tedy

$$y_v = f(x_v) = 2 \cdot (-5)^2 + 20 \cdot (-5) + 42 = -8\,.$$

Souřadnice vrcholu kompaktně tedy $V = [-5, -8]$.

Grafy obou funkcí si můžete vykreslit např. v Desmosu:
`https://www.desmos.com/calculator?lang=en`