9:15
a) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 5)$

Cílem je vyšetřit křivost funkce, spočítáme první a druhou derivaci, tedy

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 5} \cdot (2x - 2) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 5}\,.$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2 \cdot (x^2 - 2x + 5) - (2x - 2) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x + 5)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x + 10 - (4x^2 - 8x + 4)}{(x^2 - 2x + 5)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 4x + 6}{(x^2 - 2x + 5)^2}\,. \end{aligned}$$

Inflexní body získáme řešením $f''(x) = 0$, tedy řešením

$$-2x^2 + 4x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad (x + 1)(x - 3) = 0\,.$$

Inflexními body tedy jsou $x_1 = -1$ a $x = 3$. Abychom vyšetřili křivost, potřebujeme všechny nulové body druhé derivace, podíváme se tedy ještě do jmenovatele - kvadratická funkce $x^2 - 2x + 5$ má diskriminant rovný $D = 4 - 20 = -16$, taková parabola tedy nikde neprotíná osu x a žádný další nulový bod nemáme. Díváme se tedy na znaménko f'' v intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$, a $(3, \infty)$. Analýzou zjistíme následující

$$\begin{aligned} (-\infty, -1) &: -\,, \\ (-1, 3) &: +\,, \\ (3, \infty) &: -\,. \end{aligned}$$

V intervalu $(-\infty, -1$ a $(3, \infty)$ konkávní (druhá derivace je záporná) a na intervalu $(-1, 3)$ konvexní (druhá derivace je kladná). Ještě nalezneme $y-$nové souřadnice nalezených inflexních bodů

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 \quad f(-1) = \ln 8 \quad [-1, \ln 8]\,, \\ x_2 &= 3 \quad f(3) = \ln 8 \quad [3, \ln 8]\,. \end{aligned}$$

11:00

a) $f(x) = (x^2 + 3x + 2)\mathrm{e}^{-x}$

Cílem je vyšetřit křivost funkce, spočítáme první a druhou derivaci, tedy

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 3)\mathrm{e}^{-x} + (x^2 + 3x + 2)\mathrm{e}^{-x}(-1) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(-x^2 - x + 1)\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'' &= (-2x - 1)\mathrm{e}^{-x} + (-x^2 - x + 1)\mathrm{e}^{-x}(-1) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(x^2 - x - 2)\,. \end{aligned}$$

Inflexní body získáme řešením $f''(x) = 0$, tedy řešením

$$\mathrm{e}^{-x}(x^2 - x - 2) = 0 \qquad x^2 - x - 2 = 0\,,$$

řešení hned vidíme z Vietových vzorců, $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$. Také jsme zde využili toho, že exponenciála je vždy nezáporná. Z toho zároveň hned vidíme, že žádné další nulové body druhá derivace nemá a my se díváme na znaménka

$$\begin{aligned} (-\infty, -1) &: +\,, \\ (-1, 2) &: -\,, \\ (2, \infty) &: +\,. \end{aligned}$$

V intervalu $(-\infty, -1)$ a $(2, \infty)$ konvexní (druhá derivace je kladná) a na intervalu $(-1, 2)$ konkávní (druhá derivace je záporná). Ještě nalezneme $y-$nové souřadnice nalezených inflexních bodů

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 \quad f(-1) = 0 \quad [-1,\ 0]\,, \\ x_2 &= 2 \quad f(2) = 12\mathrm{e}^{-2} \quad [2, 12\mathrm{e}^{-2}]\,. \end{aligned}$$