Proto funkce nemá žádné asymptoty bez směrnice.

Nyní budeme hledat asymptoty se směrnicí. S použitím důsledku 6.35 dostaneme

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Tedy funkce má asymptotu se směrnicí $y = \frac{\pi}{2}$ pro $x \to \pm\infty$. ▲

6.5. Průběh funkce — shrnutí

Při vyšetřování průběhu funkce f postupujeme takto:

1. Stanovíme $D(f)$, $H(f)$, zda je funkce f případně sudá, lichá nebo periodická. Najdeme body nespojitosti a rozhodneme o jejich druhu.
   Určíme nulové body funkce f a intervaly, kde je f kladná a kde záporná.
2. Vypočítáme f' a podle jejího znaménka určíme:
   - intervaly, kde je f rostoucí (z podmínky $f' > 0$),
   - intervaly, kde je f klesající (z podmínky $f' < 0$),
   - lokální extrémy (podle změny znaménka f').
3. Vypočítáme f'' a podle jejího znaménka určíme:
   - intervaly, kde je f konvexní (z podmínky $f'' > 0$),
   - intervaly, kde je f konkávní (z podmínky $f'' < 0$),
   - inflexní body (podle změny znaménka f'').
4. Určíme asymptoty funkce f.
5. Vypočítáme funkční hodnoty ve významných bodech (lokální extrémy, inflexní body atd.).
6. Nakreslíme graf funkce.

Příklad 6.37. Vyšetřete průběh funkce

$$f:\, y = \frac{\ln x^2}{x}\,.$$

Řešení.

1. Definiční obor $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Platí $f(-x) = \frac{\ln(-x)^2}{-x} = -\frac{\ln x^2}{x} = -f(x)$, proto je daná funkce lichá a vlastnosti musí být jistým způsobem „symetrické“.

   Nulové body funkce určíme z rovnice $f(x) = 0$, odkud dostáváme $x = \pm 1$. Vyšetříme znaménko funkce:

$$f:\quad \begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$$

2. Určíme první derivaci:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2}\,x - \ln x^2}{x^2} = \frac{2 - \ln x^2}{x^2}\,.$$

Odtud zjistíme stacionární body funkce:

$$f'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x^2 = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\mathrm{e}.$$

Snadno zjistíme znaménko první derivace na jednotlivých intervalech:

$$f': \quad \begin{array}{ccccccc} \searrow & & \nearrow & & \nearrow & & \searrow \\ - & & + & & + & & - \\ \hline & -\mathrm{e} & & 0 & & \mathrm{e} & \\ & \text{min} & & & & \text{max} & \end{array}$$

Funkce nabývá lokálního minima v bodě $x = -\mathrm{e}$ a lokálního maxima v bodě $x = \mathrm{e}$.

3. Druhá derivace je

$$f''(x) = \frac{-\frac{2x}{x^2}\,x^2 - (2 - \ln x^2)2x}{x^4} = \frac{2(\ln x^2 - 3)}{x^3}\,.$$

Určíme nulové body druhé derivace, protože pouze v nich mohou být inflexní body:

$$f''(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x^2 = 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\sqrt{\mathrm{e}^3}.$$

Její znaménko je:

$$f'': \quad \begin{array}{ccccccc} \frown & & \smile & & \frown & & \smile \\ - & & + & & - & & + \\ \hline & -\sqrt{\mathrm{e}^3} & & 0 & & \sqrt{\mathrm{e}^3} & \\ & \text{inf} & & & & \text{inf} & \end{array}$$

4. Pro určení asymptot funkce počítejme limity

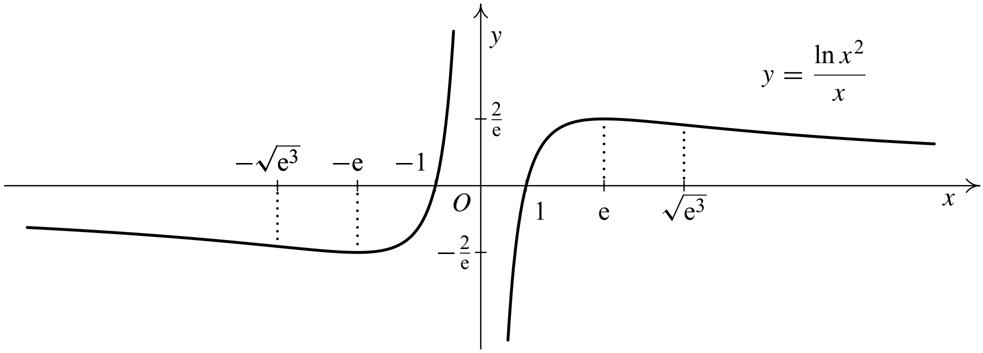
$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\ln x^2}{x} = \mp\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln x^2}{x} = 0.$$

Odtud vidíme, že přímka $y = 0$ je asymptotou bez směrnice a přímka $y = 0$ je asymptotou pro $x \to \pm\infty$.

5. Spočítáme hodnoty funkce f ve významných bodech (extrémy, inflexní bod):

$$\text{maximum/minimum: } f(\pm\mathrm{e}) = \pm\frac{2}{\mathrm{e}}\,, \qquad \text{inflexe: } f(\pm\sqrt{\mathrm{e}^3}) = \pm\frac{3}{\sqrt{\mathrm{e}^3}}\,.$$

6. Nakreslíme graf funkce — viz obr. 6.6. Funkce je lichá, proto je její graf souměrný podle počátku. (Měřítko na ose x je dvakrát větší než na ose y.) ▲



Obr. 6.6

6.6. Řešené příklady na extrémy a průběh funkce

Příklad 6.38. Vyšetřete průběh funkce

$$f : y = x - 2 \operatorname{arctg} x.$$

Řešení.

1. Definiční obor dané funkce je $D(f) = \mathbb{R}$. Dále platí

$$f(-x) = -x - 2 \operatorname{arctg}(-x) = -x + 2 \operatorname{arctg} x = -f(x),$$

proto je funkce lichá a její vlastnosti budou „symetrické“.

Pokusíme se určit znaménko funkčních hodnot. Rovnici $\operatorname{arctg} x = \frac{x}{2}$ však nedokážeme řešit. Jeden kořen je jasný — $x = 0$. Protože funkce $\operatorname{arctg} x$ má v bodě $x = 0$ derivaci rovnu 1 a funkce $\frac{x}{2}$ má derivaci $\frac{1}{2}$, lze z grafů těchto funkcí odhadnout, že existuje jediné číslo $a > 0$ takové, že v $\pm a$ má naše funkce kořeny. Přesněji to uvidíme z výsledného grafu. Tedy:

$$f:\quad \begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & -a & & 0 & & a & \end{array}$$

2. Počítejme první derivaci:

$$y' = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}.$$

Odtud dostáváme stacionární body $x = \pm 1$ a znaménko první derivace na jednotlivých intervalech:

$$f':\quad \begin{array}{ccccc} \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\ + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 1 & \\ & \text{max} & & \text{min} & \end{array}$$