Cvičení 7 (Aplikace derivací) 8. 11. 22

a) Tečna ke grafu funkce:

definice derivace: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$\hookrightarrow \quad f'(x_0)(x - x_0) = \underset{\overset{\parallel}{y}}{f(x)} - \underset{\overset{\parallel}{y_0}}{f(x_0)}$$

Mějme funkci $f(x)$, v bodě $T[x_0, y_0]$ bod dotyku tečny k funkci $f(x)$. Rovnice tečny:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

rovnice přímky (lin. fce), převod

$$\boxed{y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Př. 1 Nalezni rci tečny pro $f(x) = x^2 + 3x - 2$ v bodě $x_0 = 1$.

$y_0 = f(x_0) = f(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$ tj. $T[1, 2]$

směrnice: $f'(x_0) = 2 \cdot x_0 + 3 = 5$

celkově: $y - 2 = 5(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 5x - 3}$

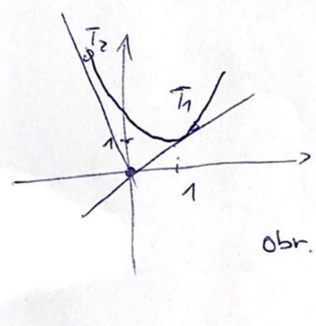
Př. 2 Nalezněte rci tečny pro $f(x) = x^2 - 2x + 2$ procházející počátkem.

• z obrázku víme, že tečny budou mít formu $y(x) = a \cdot x$ (pouze směrnice)

$f(0) = 2$

$f'(x_0) = 2x_0 - 2$

$x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$



obr.

rovnice tečny: dosadí počátek

$$\underset{\overset{\parallel}{0}}{y} - y_0 = f'(x_0)(\underset{\overset{\parallel}{0}}{x} - x_0)$$

$$y_0 = 2x_0^2 - 2x_0 \overset{!}{=} x_0^2 - 2x_0 + 2$$

$$x_0 = \begin{cases} \sqrt{2}; \ y_0 = 4 - 2\sqrt{2}, & t_1: y = (-2 + 2\sqrt{2})x \\ -\sqrt{2}; \ y_0 = 4 + 2\sqrt{2}; & t_2: y = (-2 - 2\sqrt{2})x \end{cases}$$

Př.3 Tečna k $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ v bodě $x_0 = -2$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$T[x_0, ?]$ $\quad T = [-2, 5]$

$$f(x_0) = \frac{2\cdot(-2)-1}{-2+1} = \frac{-5}{-1} = \underline{5}$$

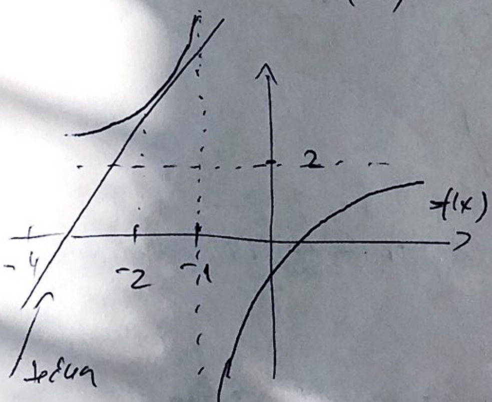
$$f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x_0) = \frac{3}{(-2+1)^2} = \underline{\underline{3}}$$

Rovnice:

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y(x) = 5 + 3\cdot(x - \underset{(-2)}{\cancel{x_0}}) = 5 + 3\cdot(x+2) = 5 + 3x + 6 = \underline{\underline{3x + 11}}$$



$$(2x-1):(x+1) = 2 - \frac{3}{x+1}$$
$$\underline{-(2x+2)}$$
$$-3$$

$$= \underset{y_s}{2} + \frac{(-3)}{x-\underset{x_s}{(-1)}}$$

$(-3) \rightarrow$ II, IV. kvadranty

5) L'Hospitalovo pravidlo

→ elegantní způsob řešení limit

Q: kdy použít?

a) $\frac{0}{0}$

b) $\frac{a}{\pm\infty}$ $a \in \mathbb{R}^*$ (tj. ostatní $\pm\infty$)

Pro $g'(x) \neq 0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

limita musí existovat. $(A \in \mathbb{R}^*)$

Př. 5
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3}{x^5 + 6} \stackrel{(+1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(x^3 + \frac{6}{x^2}\right)} = \underline{\underline{0}}$$

L'Hospital:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3}{x^5 + 6} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{5x^4} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{20x^3} = \underline{\underline{0}}$$

Př. 6
$$\lim_{x \to 0} \frac{x+2}{x+1} = \frac{0+2}{0+1} = 2 \quad \text{(stačí dosadit)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+2}{x+1} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{1} = 1$$

NELZE POUŽÍT L'H. (není typu 0/0)

VŽDY OVĚŘIT PŘEDPOKLADY

Př. 7
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{10} - 1}{x - 1} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{x \to 1^+} \frac{x^{10} - 1}{x - 1} \\ \lim_{x \to 1^-} \frac{x^{10} - 1}{x - 1} \end{cases} = \lim_{x \to 1} \frac{x^{10} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^9 + x^8 + \ldots + x + 1)}{\cancel{(x-1)}}$$

$$= \underline{\underline{10}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{10} - 1}{x - 1} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{10x^9}{1} = \underline{\underline{10}}$$

typ $\frac{0}{0}$

lze použít.

identita:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1)$$

Př. 8 $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)\cdot x^2$ „dosazení dá": $+\infty\cdot 0$ neurčitost, ale nedefinováno?

Proč zprava?

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x)\cdot\frac{1}{\frac{1}{x^2}} \sim \frac{f(x)}{g(x)} \qquad f(x)=\ln(x),\quad g(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^3}{2x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2} = \underline{\underline{0}}$$

typ $\frac{+\infty}{+\infty}$

Př. 9 $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty$$

typ $\frac{+\infty}{+\infty}$ typ $\frac{+\infty}{+\infty}$

Př. 10 $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+1}{x-2}$$

snadná

L'H nelze použít, proč?

Př. 11 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^3}}{e^{x^2}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2e^{x^3}+\dots}{2xe^{x^2}+\dots}$$ „oddalujeme se od cíle"

typ $\frac{+\infty}{+\infty}$

Př. 12 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{p\,x^{p-1}}{e^x} = \dots \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{p(p-1)\dots 1}^{=p!}}{e^x} \xrightarrow{x\to+\infty} \underline{\underline{0}}.$$

$p\in\mathbb{N}$ typ $\frac{+\infty}{+\infty}$

Př. 13 $$\lim_{x\to 0^+} \ln(x)\sqrt{x}$$