Cvičení 6 (Derivace)

25. 10.

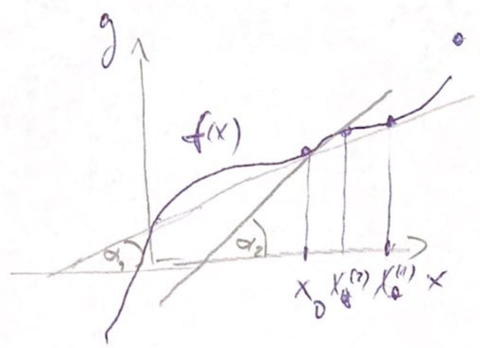
derivace intuitivně: nechť funkce $f(x)$ popisuje nějakou vlastnost, potom její derivace $f'(x)$ udává míru změny (rychlost) této funkce (vzhledem k její proměnné).

derivace matematicky: nechť $f(x)$ je spojitá funkce jedné proměnné. Potom derivaci funkce $f(x)$ v bodě x_0 nazveme:

$$\boxed{\frac{d f(x)}{dx} \equiv f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

vlastní derivace

nevlastní derivace



- bod x_0 limitně pošleme k x, jak se přibližujeme, vidíme, že se směrnice α mění. Směrnice po tom, co do x limitně dorazíme odpovídá derivaci

$$\tan(\alpha) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

goniometrická fce tangens

Analogicky můžeme definovat jednostranné derivace:

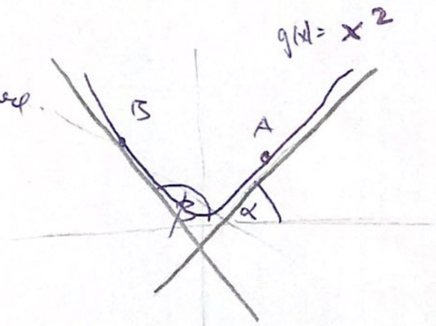
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(nespojité funkce)

Pozn.: V praxi definici s limitou nepoužíváme. (→ odvozujeme obecný vzorečky.

Motivace:

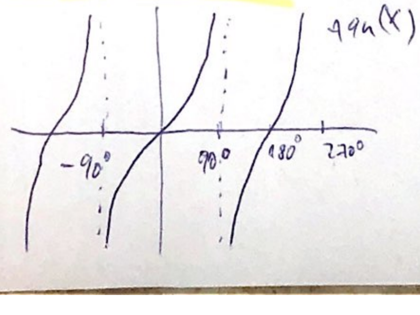


$\alpha \dots \tan(\alpha) > 0$

$\beta \dots \tan(\beta) < 0$

→ vidíme, že derivace nám něco říká o tom, zda funkce roste/klesá! (viz. průběh funkce)

Q: Jak vypadá tangens?



Q: Jaké derivace obecně počítat?

- konstantní funkce: $f(x) = c$ $\quad f'(x) = 0$
- mocninná funkce: $f(x) = x^{\alpha}$ $\quad f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$

  $(\alpha \in \mathbb{R})(x > 0)$
- exponenciální funkce: $f(x) = e^{x}$ $\quad f'(x) = \cancel{f(x)}\, e^{x}$
- mocninná funkce: $f(x) = x^{n}$ $\quad f'(x) = n x^{n-1}$

  $(n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$
- exponenciální funkce: $f(x) = a^{x}$ $\quad f'(x) = a^{x} \cdot \ln a$
- logaritmus: $f(x) = \ln(x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$

  $a > 0$
- logaritmus: $f(x) = \log_a x$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

$$\boxed{D_f = D_{f'}}$$

Q: Jak na kombinace funkcí?

- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- součin/rozdíl: $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- součin: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ (Leibnitz)
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (Leibnitz)
- složená funkce:

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$ (řetízkové pravidlo)

Zderivuji VNĚJŠÍ a NÁSOBÍM derivací funkce VNITŘNÍ.

Př. 1 $f(x) = 3x^2 + 14$ (mocninná funkce a konstanta)

$f'(x) = 6x + 0 = 6x$

Př. 2 $f(x) = 18x^4 - \frac{1}{3x^2}$ (mocninná funkce)

$f'(x) = 92x^3 - \frac{1}{3}\left(-2 \cdot \frac{1}{x^3}\right) = 92x^3 + \frac{6}{x^3}$

$\frac{1}{3x^2}$ lze řešit jako podíl pro $f = 1$, $g = 3x^2$

$\left(\frac{1}{3x^2}\right)' = \frac{-6x}{9x^4} = -\frac{2}{3x^3}$

Př. 3 $f(x) = \frac{3x+5}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{3(x^2+1) - 2x(3x+5)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2+3-6x^2-10x}{x^4+2x^2+1} = \frac{-3x^2-10x+3}{x^4+2x^2+1}$

Př. 4 $f(x) = (\underbrace{2x-3}_{f_1})(\underbrace{8-\frac{1}{2x}}_{f_2})$

$f' = (f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2' = 2 \cdot \left(8 - \frac{1}{2x}\right) + (2x-3)\frac{1}{2x^2} =$

$= \left(6 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} = 6 - \frac{3}{2x^2}$

Q: Derivace odmocniny?

- $f(x) = \sqrt{x} = (x)^{1/2}$

  $f'(x) = \frac{1}{2} x^{1/2 - 1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} =$

  $= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$

  $-1/2 - 1$

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = (x)^{-1/2} =$

  $f'(x) = -\frac{1}{2}(x)^{-3/2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

Př. 5 $f(x) = e^x - 3x + 8$

$f'(x) = e^x - 3$

Př. 6 $f(x) = e^{x^8 - 3x + 8}$ (složená funkce)

$f'(x) = \underbrace{e^{x^8 - 3x + 8}}_{\text{vnější funkce}} \cdot (\underbrace{8x^7 - 3}_{\text{vnitřní funkce}})$

Př. 7 $f(x) = \log_3\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\,\ln 3}}_{\text{vnější funkce 1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}_{\text{vnější fce 2}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{vnitřní funkce}} = \frac{x}{(x^2+1)\cdot \ln 3}$$

• porovnej s $f(x) = \log_3\left(\sqrt{x}\right)$

Př. 8 $f(x) = \sqrt{5^x+11}$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5^x+11}}}_{\text{vnější fce}}\left(5^x+11\right)' = \frac{1}{2}\frac{5^x \ln 5}{\sqrt{5^x+11}}$$

$(a^x)' = a^x \ln a$

Př. 9 $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2x}\right)$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2x}\right)}}_{\text{vnější fce}} \cdot \underbrace{\frac{1\cdot(2x) - (x+1)\cdot 2}{(2x)^2}}_{\text{podíl}} = \frac{2x}{x+1}\,\frac{(-2)}{4x^2} = -\frac{1}{(x+1)\,x}$$

Př. 10 $f(x) = e^{3x^2+2x-1} + \frac{4x+1}{x^2-3x}$

$$f'(x) = \underbrace{e^{3x^2+2x-1}}_{\text{vnější}} \cdot \underbrace{(6x+2)}_{\text{vnitřní}} + \underbrace{\frac{4(x^2-3x) - (4x+1)(2x-3)}{(x^2-3x)^2}}_{\text{podíl}}$$

$$= \frac{4x^2 - 12x - (8x^2 - 12x + 2x - 3)}{(x^2-3x)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{4x^2} - 4x^2 - 2x + 3}{(x^2-3x)^2}$$