Cvičení 4 (Limity a posloupnosti) 11.10.22

posloupnost = soubor prvků nějaké množiny, lineárně uspořádán, prvky se mohou opakovat

značíme $\{a_n\}_{n=1}^{N}$
- konečná $N \in \mathbb{N}$
- nekonečná $N = +\infty$

$f: \mathbb{N} \to X$ ← nějaká množina

graf: izolované body

- monotónní
  - rostoucí $\forall i: a_i > a_{i-1}$ ($a_i \geq a_{i-1}$)
  - klesající $\forall i: a_i < a_{i-1}$ ($a_i \leq a_{i-1}$)
- nemonotónní (oscilující)

- zdola ohraničená $\exists K \in \mathbb{R}: \forall i: a_i \geq K$
- zeshora ohraničená $\exists K \in \mathbb{R}: \forall i: a_i \leq K$

Q: Jaké známe druhy posloupností?

• aritmetická posloupnost:

$$\boxed{a_n = a_0 + n \cdot d}$$

d... diference
a_0... 0-tý člen

součet prvních n členů:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

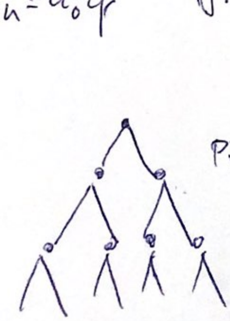
Př. $-5, -3, -1, 1, \dots$ (+2, +2, +2)

aritmetická posloupnost s diferencí +2

$$\boxed{a_n = -5 + 2n}$$

• geometrická posloupnost:

$a_n = a_0 q^n$ tj. členy po sobě jdoucí se liší q-krát



Př. dělení buněk

$a_n = 1 \cdot 2^n$, $a_0 = 1$, $q = 2$

Q: Jak posloupnost zapsat?

a) výpisem členů posloupnosti
b) předpis pro n-tý člen:

Př. $a_n = \dfrac{2^n + 1}{3n + n^2}$

c) rekurentně: tj. vztah mezi a_n-tým členem a členy předchozími

Př. $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (Fibonacci)
$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

Q: Otázka konvergence?

• Zkoumáme posloupnosti pro $n \to +\infty$ („velká n")

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = A \qquad A \in \mathbb{R}^* := (-\infty, +\infty)$$

• Pokud $A \in \mathbb{R}$, pak mluvíme o konvergenci, pokud $A = \pm\infty$, posloupnost diverguje.

Limita vůbec nemusí existovat ve smyslu „hodnoty, ke které se blížíme.".

Př. oscilující posloupnost $a_n = (-1)^n$

Q: Jak limity posloupností počítat? (1), (2), (3) → věty o aritmetice limit

Nechť $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to+\infty} b_n = B$ $\quad A, B \in \mathbb{R}^*$

Potom:

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \pm \lim_{n\to+\infty} b_n = A \pm B \quad (1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n = A \cdot B \quad (2)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} a_n \Big/ \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{A}{B} \quad (3)$$

Pozn. výrazy musejí dávat mat. smysl. (nedělit nulou apod.)

Nedefinované výrazy: $+\infty - \infty = ?$

$\pm\infty \cdot 0 = ?$

nějaká konstanta → $\frac{k}{0}, \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{0} = ?$

$+\infty^0, 0^0, 1^{+\infty} = ?$

Řešíme jinak: „finty" (triky) (př. L'Hopital) další cvičení pro funkce

Příklady ilustrační:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} 3^n = +\infty \quad \text{(nevlastní limita)}$$

$$\lim_{n\to\infty} 3^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0.$$

Q: Co se nám bude hodit?

aritmetické vzorce na úpravu výrazů

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$

$(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

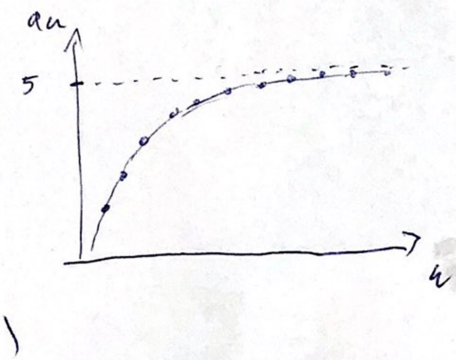
$(a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ (Binomická věta)

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} 0 & \boxed{\alpha < 0} \\ 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha > 0 \end{cases}$$ ← nejzajímavější

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n}{n+1} = \frac{n}{n} \cdot \frac{5}{1+\frac{1}{n}}$$

Př. $a_n = \frac{5n}{n+1}$



$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & a \in (-1,1) \\ +\infty & a > 1 \\ \nexists & a \leq -1 \text{ (osciluje)} \\ 1 & a = 1 \end{cases}$$

(konvergence geometrické posloupnosti)

Př.:

(A) Přímý výpočet limity $\nearrow$ VoA

= t.j. aplikace věty o aritmetice a dosazení do předpisu

Př. 1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n + n^2 + 3n - 1\right] \overset{VoA}{=} \underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{=\,0} + \underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} n^2}_{=\,+\infty} + \underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} 3n}_{=\,+\infty} + \underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)}_{=\,-1}$

$= +\infty$ posloupnost diverguje / má nevlastní limitu

nemohu sčítat nekonečna, odečítat ne, protože nevím, jaké je „větší", resp. co je výsledek (může být „cokoliv")

Př. 2 $\lim\limits_{n\to\infty}(4n^4 - 2n) \overset{VoA}{=} \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} 4n^4}_{=\,+\infty} - 2\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} n}_{=\,-\infty}$

= nedefinovaný výraz.

Q: Co dál? Naučíme se několik triků.

(B) Vytknutí nejvyšší mocniny / nejvyššího stupně polynomu.

$\lim\limits_{n\to\infty}(4n^4 - 2n) = \lim\limits_{n\to\infty} n^4\left[4 - \frac{2}{n^3}\right] \overset{VoA}{=} \lim\limits_{n\to\infty} n^4 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(4 - \frac{2}{n^3}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} n^4 \cdot \left[\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} 4}_{=\,4} - \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}}_{=\,0}\right] = 4\lim\limits_{n\to\infty} n^4 = +\infty$ posloupnost diverguje.

Př. 3 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{2n}\,\frac{1}{1+\frac{1}{2n}} \overset{VoA}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2n}} = \frac{1}{1} = 1$

Pozn. Vždy zkus přímé dosazení → dostaneš-li nedefinovaný výraz, zkus triky B, C, D.

Př. 4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^4 - n^3 + 4n^2}{5n^5 + n - 1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^4}{n^5}\,\frac{2 - \frac{1}{n} + \overset{\to 0}{\frac{4}{n^2}}}{5 + \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^5}} =$

$\overset{VoA}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^5}}\,\frac{1}{n} = \cancel{\frac{2}{5n}}$ ~~posloupnost diverguje (nevlastní limita)~~

$\frac{1}{n} \to 0$ konverguje

Př. 6

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2(1+\frac{4}{n^2})}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n}\,\frac{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}} =$$

$$\overset{\text{VoA}}{=} \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}_{=1} \Big/ \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{=1} = 1$$

vlastní limita, konverguje.

Ⓒ Vytknutí exponenciálního členu o největším základu

Př. 7

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 3^{n+2} - 4^n}{5\cdot 4^{n-1}+20} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n\left(-1+4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot 3^2\right)}{4^n\left(5\cdot\frac{1}{4}+\frac{20}{4^n}\right)} =$$

$$\overset{\text{VoA}}{=} \frac{\lim_{n\to+\infty}\left[-1+36\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}+\frac{20}{4^n}\right)} = \frac{-1}{(5/4)} = -\frac{4}{5}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \qquad = \left(\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

vlastní limita, konverguje.

Ⓓ Rozšíření výrazu výrazem s opačným znaménkem.

Př. 8

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2-n-1} - \sqrt{n+1}$$

→ vede na neurč. výraz $+\infty - +\infty$

rozšíříme výrazem „chytrou jedničkou"

$$\frac{\sqrt{n^2-n-1} \oplus \sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2-n-1}+\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-n-1}-\sqrt{n+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2-n-1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2-n-1}+\sqrt{n+1}}$$

Q: Proč to děláme? Můžeme pak použít vzorec

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2-n-1}\right)^2-\left(\sqrt{n+1}\right)^2}{\sqrt{n^2-n-1}+\sqrt{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-2n-2}{\sqrt{n^2-n-1}+\sqrt{n+1}}$$

zde svále dostáváme neurčitý výraz použij B.

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(1-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{\cancel{n}\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\cancel{n}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \overset{\text{VoA}}{=} \lim_{n\to+\infty} n\,\frac{1-\overbrace{\frac{2}{n}}^{=0}-\overbrace{\frac{2}{n^2}}^{=0}}{\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}_{=1}+\underbrace{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}_{=0}} = n\cdot\frac{1}{1} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

nevlastní limita, diverguje.

Další příklady:

Př. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{9}{4}\right)^{n+1}}$

řešení: $(-4/9)$

Algoritmus:
- dosazení: pokud že vyjde nedefinovaný výraz, použij triky B, C, D podle povahy problému, případně jejich kombinaci

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+2)^3-n(n+2)}{(n^2+3)(3n-2)}$ $(1/3)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$ (1)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1}\left(n^2-\sqrt{n^4-10n+18}\right)$ (5)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1}\left(n^2-\sqrt{n^4-10n+18}\right) \overset{(D)}{=} \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1}\,\frac{(n^2)^2-\left(\sqrt{n^4-10n+18}\right)^2}{n^2+\sqrt{n^4-10n+18}} =$$

dosazení dá $+\infty-+\infty$ (nedef.)

rozšíř. $\dfrac{n^2+\sqrt{n^4-10n+18}}{n^2+\sqrt{n^4-10n+18}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1}\,\frac{\cancel{n^4}-\cancel{n^4}+10n-18}{n^2+\sqrt{n^4-10n+18}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{10n\sqrt{n^2+1}-18\sqrt{n^2+1}}{n^2+n^2\sqrt{1-10\frac{1}{n^3}+\frac{18}{n^4}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(10\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-18\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\right)}{\cancel{n^2}\left[1+\sqrt{1-\frac{10}{n^3}+\frac{18}{n^4}}\right]} =$$

$\to 10$, $\to 0$, $\to 1$, $\to 1$

$\overset{VoA}{=} \dfrac{10}{2} = \underline{\underline{5}}$ vlastní limita