Cvičení 3 (Logaritmy a exponenciály)

3.10.22

Nejdříve k mocninám a odmocninám: a^b

a… základ ($a \in \mathbb{R}$)

b…. exponent ($b \in \mathbb{N}, \ldots$)

$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ ← musím mít stejný základ

$(a^b)^c = (a^c)^b = a^{b \cdot c}$

$a^0 = 1$ „cokoliv na nultou je jedna"

$\sqrt[b]{a^c} = a^{\frac{c}{b}}$ $\quad a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

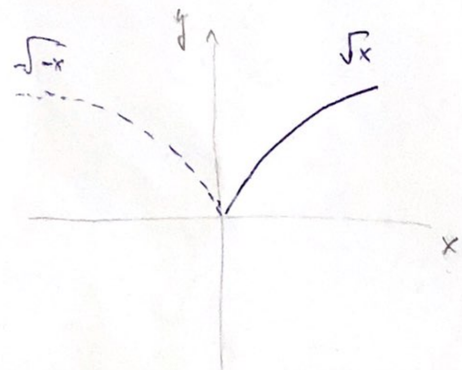
definiční obor sudých odmocnin ≥ 0.

Př: $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

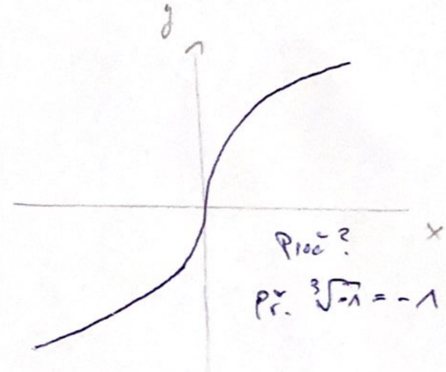
$(2^2)^4 = (2^4)^2 = 2^8$

$\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2^{3/3} = 2$

Q: Jak vypadá graf $\sqrt{x}$?



Q: Jak vypadá graf $\sqrt[3]{x}$?



Proč?

Př. $\sqrt[3]{-1} = -1$

Exponenciální funkce

• rozlišujeme dva případy:

-předpis:

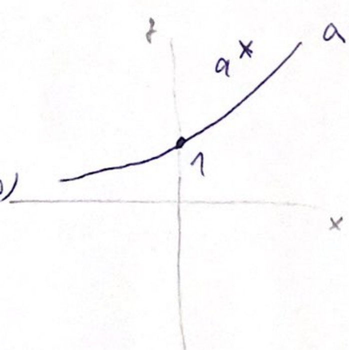
$y(x) = a^x$

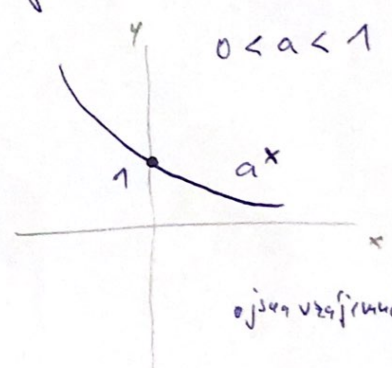
$a > 0$

$a \neq 1$

$D_f = \mathbb{R}$

$H_f = (0, +\infty)$





• jsou vzájemně inverzní

Logaritmická funkce

-předpis

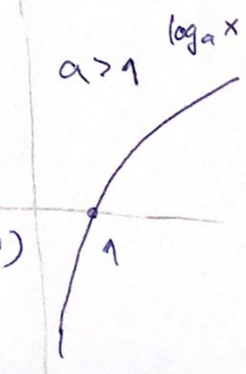
$y(x) = \log_a x$

„logaritmus o základu a z čísla x"

$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$D_f = (0, +\infty)$

$H_f = \mathbb{R}$



Exponenciální rovnice (stejný základ)

Př. $2^{3x-4} = 8^{2x+1}$ — vidíme, že $8 = 2^3$

$2^{3x-4} = (2^3)^{2x+1}$ — použij vztah $(a^b)^c = (a^c)^b = a^{c \cdot b}$

$$\boxed{2^{3x-4} = 2^{3(2x+1)} = 2^{6x+3}}$$ — stejný základ, můžeme porovnat exponenty

$3x - 4 = 6x + 3$

$-7 = 3x$

$x = -\frac{7}{3}$

vzoreček: $5^x \cdot 2^x = (5 \cdot 2)^x = 10^x$

$100 = 10^2$

Př. $5^x \cdot 2^x = 100^{x-1}$

$10^x = (10^2)^{x-1} = 10^{2x-2}$ — základ stejný, porovnáme exponenty

$x = 2x - 2$

$2 = x$

Převod na kvadratickou rovnici: substituce

Př. $4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$

všimnu si: $4^{2x} = (4^x)^2$

substituce: $y = 4^x$

$y^2 - 6y + 8 = 0$

$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2}$ — 4, 2

$4^{x_1} = 4 \Rightarrow x_1 = 1$

$4^{x_2} = 2$

$2^{2x_2} = 2 \Rightarrow 2x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1/2$

$K = \{1/2, 1\}$

Př. $16^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = 1$

Q: Co když jsou základy různé? → odpověď na otázku, na jaké číslo musím umocnit základ $\underline{a}$, abych získal číslo $\underline{x}$.

- musíme se naučit počítat s logaritmy

$$a^y = x \iff \log_a x = y$$

- Speciální volby základu:

  $a = 10$ tj. $\log_{10} x$ logaritmus desítkový

  $a = e \doteq 2.718$ (Eulerovo číslo) tj. $\log_e(x) = \ln(x)$ logaritmus přirozený

  Pozor na anglosaskou literaturu, log se zde označuje logaritmus přirozený.

Př: $10^3 = 1000$ tj. $\log_{10} 1000 = 3$

Q: Jak s logaritmy počítat?

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (1)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad (2)$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x \quad (3)$$

Pozn.: $\log_a 1 = 0$ (I1)

$\log_a a = 1$ (I2)

Pozn. $\log_a a^x = x$

Př. rozměňme již spočtený příklad: o libovolném základu

$$2^{3x-4} = 8^{2x+1} \quad / \log \quad („zlogaritmujme obě strany rce")$$

$$\log 2^{3x-4} = \log 8^{2x+1}$$

vzoreček (3)

$$(3x-4) \cdot \cancel{\log 2} = (2x+1) \log 8 = (2x+1) \log 2^3 = 3(2x+1)\cancel{\log 2}$$

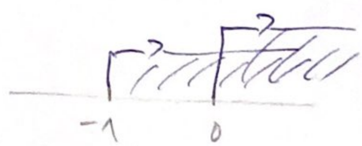
$$3x-4 = 6x+3$$

$$-7 = 3x$$

$$\underline{\underline{x = -7/3}}$$

Q: Pro jaká x má rovnice smysl?

$x+1 > 0$ a $x > 0$



$x \in (0, +\infty)$

Př. $\log_2(x+1) - \log_2 x = 1$

vzoreček (2)

$$\log_2\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$$

(I2)

$$\log_2\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log_2 2$$

+ $\underline{\text{zkouška}}$

$$\frac{x+1}{x} = 2 \quad / x \neq 0$$

$x+1 = 2x \Rightarrow x = 1$ (v pořádku $1 \in (0, +\infty)$)

Př. $\log(x+5) - \log(x-1) = 1 - \log 2$

$x > 1$
$x > -5$
$x \in (1, +\infty)$

$$\log \frac{x+5}{x-1} = \log 10 - \log 2$$

$$\log \frac{x+5}{x-1} = \log \frac{10}{2}$$

$$\frac{x+5}{x-1} = \frac{10}{2} = 5 \rightarrow x+5 = 5x-5$$

$$10 = 4x$$

$$\underline{\underline{x = 2.5}}$$

• zkontroluj, zda-li tam patří

+ zkouška

Př. $\log\sqrt{x+4} - \log\sqrt{x-4} = \log 12 - \log 4$

• vidíme, že $\sqrt{x+4} > 0$
$\sqrt{x-4} > 0$,
to platí, když:
$$\left.\begin{matrix} x+4 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{matrix}\right\} x \in (4, +\infty)$$

$$\log \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}} = \log \frac{12}{4}$$

$$\log \sqrt{\frac{x+4}{x-4}} = \log 3$$

(3) přepíšu:

$$\sqrt{\frac{x+4}{x-4}} = \left(\frac{x+4}{x-4}\right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{2} \log \frac{x+4}{x-4} = \log 3$$

$$\log \frac{x+4}{x-4} = 2 \log 3 = \log 3^2$$

$$\frac{x+4}{x-4} = 9 \Rightarrow x+4 = 9x - 36$$

$$40 = 8x$$

$$\underline{\underline{x = 5}}$$

$\in (4, +\infty)$ sedí ✓

Eulerovo číslo

- $e = 2.7182\ldots$
- 17. století J. Bernoulli

e vzniká jako limitní hodnota jednotkové částky při ročním 100% úroku, zvyšuje-li se frekvence splácení v období

$$\left(1 + \frac{n}{100}\right)^n \xrightarrow{n \to +\infty} \text{získáme Eulerovo číslo } 2.7182\ldots$$

• Mějme 1,- Kč a na 1 období se 100% úrokem:

1 Kč   100%   2 Kč
A ——— B

rozdělíme na 2 období s úrokem 50%.

1 Kč   50%   50%   2.25,- Kč
A ——— B
$1.5 \cdot 1.5 = 2.25$,-

25% 25% 25% 25%
A ——— B
$1.25 \cdot 1.25 \cdot 1.25 \cdot 1.25 = (1.25)^4 = 2.44$,- Kč

Složené úročení

počet období

$$S_n = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$ úrok (%)

částka po n obdobích

počáteční vklad

Pozn.: neuvažujeme daň z úroku

Př.: Na začátku roku vložíme 1 000 000,- CZK na 3 roky na bankovní účet. Roční sazba činí 1%, úrokovací období je 1 rok.

Q: Jaká částka bude na účtu na konci 1. roku? a na konci 2. roku? a na konci 10. roku?

$$S_1 = S_0\left(1+\frac{1}{100}\right)^1 = 1\,000\,000\cdot(1.01) = 1\,010\,000,- \text{ CZK}$$

(profit +10 000 CZK)

1 mio CZK

$$S_2 = S_0\left(1+\frac{1}{100}\right)^2 = 1\,000\,000\cdot(1.01)^2 = 1\,020\,100,- \text{ CZK}$$

(profit +20 100 CZK)

$$S_{10} = S_0\left(1+\frac{1}{100}\right)^{10} = 1\,000\,000\cdot(1.01)^{10} \doteq 1\,104\,622,- \text{ CZK}$$

(profit +104 622 CZK)

Pozn. složené úročení >> jednoduché úročení

Q: Jak dlouho musíme spořit, abychom částku zdvojnásobili na 2 mio CZK?

Neznámou je nyní počet spořících (resp. úročících) období.

$$S_n = 2\,000\,000,- \text{ CZK}$$

$$S_n = S_0\left(1+\frac{1}{100}\right)^n = S_0(1.01)^n \quad /\log$$

Rovnici musíme zlogaritmovat. aplikujeme: (3) a (1)

$$\log S_n = \log S_0(1.01)^n$$

$$\log S_n = \log S_0 + n\log(1.01)$$ dosadíme $S_n = 2S_0$

$$\log 2S_0 = \log S_0 + n\log(1.01)$$

kalkulačka

$$\log 2 + \cancel{\log S_0} = \cancel{\log S_0} + n\cdot\log(1.01) \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log(1.01)} \doteq 70 \text{ let}$$

Definiční obory a znaménka funkce

Q: Jaké známe restrikce?

1. Dělení nulou (jmenovatel nenulový)
2. Výraz pod odmocninou ≥ 0
3. Argument logaritmu větší než nula.

Př: Určete definiční obor.

$$y(x) = \log \frac{3-x}{x^2-16} + e^{2x}$$

$\uparrow$ $\mathbb{R} =: D_f$

$$\frac{3-x}{x^2-16} > 0$$ $\leftarrow$ tohle je nerovnice, kterou musíme řešit tabulkou

a zároveň $x^2-16 \neq 0$

$x_{1,2} \neq \pm 4$

NB: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = -4$ $(-\infty,-4)$ $(-4,3)$ $(3,4)$ $(4,\infty)$

$-4 \quad 3 \quad 4$

$(-\infty,-4)$	$(-4,3)$	$(3,4)$	$(4,+\infty)$	
$-$	$-$	$-$	$+$	$x-4$
$-$	$+$	$+$	$+$	$x+4$
$+$	$+$	$-$	$-$	$3-x$
$+$	$-$	$+$	$-$	celkově

$x \in (-\infty,-4) \cup (3,4)$

Celkově musíme udělat průnik $\mathbb{R}$ a $(-\infty,-4) \cup (3,4)$, což je samozřejmě $(-\infty,-4) \cup (3,4)$.

Př: $y(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2-6x+9}}{x-2}$

$y(x) = \sqrt{\log_2 \frac{x}{2}}$