Cvičení 2 (Racionální funkce) 27. 9. 22

Ještě krátce zpět v kvadratickým funkcím, konkrétně budeme řešit kvadratické nerovnice.

Př. $2x^2+5x-10 < -x^2-8$

Řešte graficky.

pozn. můžeme nakreslit obě paraboly, a porovnávat.

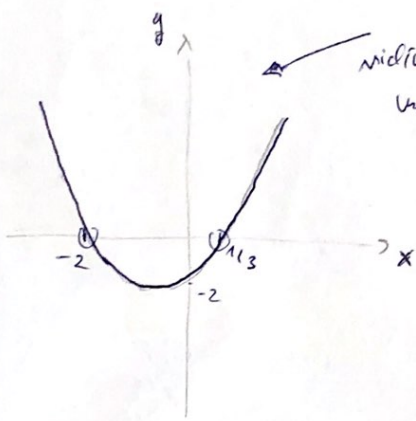
$$2x^2+5x-10 < -x^2-8$$

$3x^2+5x-2 < 0 \rightarrow$ nakreslíme

$P_y = [0,-2]$

$P_{x_{1,2}} = [x_{1,2}, 0]$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -2 \end{cases}$$



vidíme, že funkční hodnoty jsou menší než nula pro $x \in (-2, 1/3)$.

Explicitní řešení

- připomeň si nulové body

$$3x^2+5x-2 < 0$$

$$3\left(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\right) < 0$$

$$3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2) < 0$$

NB: $-2, +\frac{1}{3}$ (tj. kořeny)

$(-\infty,-2)$ $(-2,1/3)$ $(1/3,+\infty)$

-2 $1/3$

rozklad na kořenové činitele

Tabulka:

výraz	$(-\infty,-2)$	$(-2,1/3)$	$(\frac{1}{3},+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-\frac{1}{3}$	$-$	$-$	$+$
$3(x-\frac{1}{3})(x+2)$	$+$	$-$	$+$

vidíme, že v intervalu $(-2, 1/3)$ je celkový výraz záporný.

Shrnutí: najdu nulové body, vytvořím tabulku a sleduji chování polynomu (tj. znaménka) výrazu.

Pozor:
$+ \cdot + = +$
$- \cdot - = +$
$- \cdot + = -$
$+ \cdot - = -$

Úvod do polynomů

Q: Co je to polynom?

Značíme $P(x), Q(x), R(x), \dots$

↳ často přidáváme index:

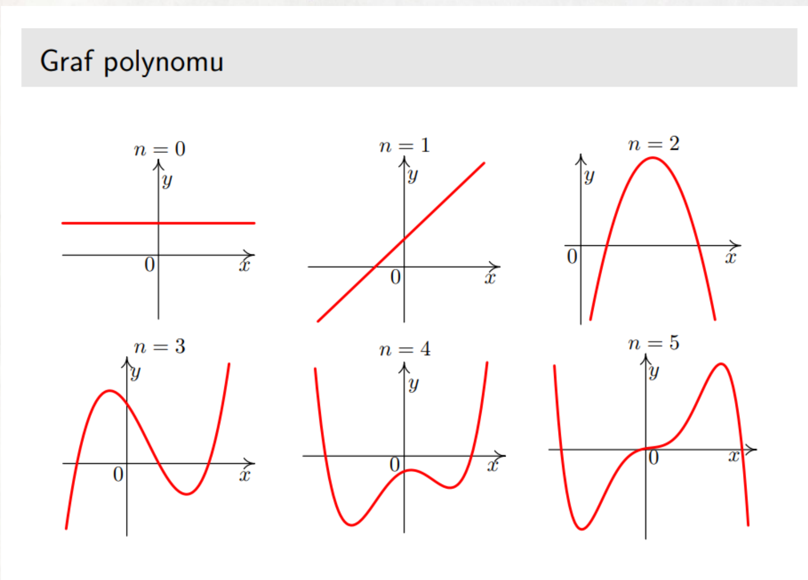
$P_n(x)$ – polynom P stupně n

Pozn: Základní věta algebry:

Polynom stupně n má právě n kořenů (včetně komplexních), k-násobný kořen počítáme jako k kořenů.

Definice: $$\boxed{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

Příklad základních polynomů:



Kubická funkce/rovnice

– předpis:

$ax^3 + bx^2 + cx + d$

Pozn. lze řešit explicitně, tzv. $\boxed{\text{Cardanovy vzorce}}$

$\exists$ i Vietovy vzorce pro kubické rovnice.

$$\left[\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a} \end{aligned}\right] \quad (VVZ)$$

Př. Řešte $x^3 - 9x^2 + 8x + 60 = 0$

Často lze (pro jednoduché koeficienty) jeden kořen uhádnout.

Zkusíme $x = -2$:

$$(-2)^3 - 9\cdot(-2)^2 + 8(-2) + 60 = 0 \ \checkmark$$

vidíme, že lze přepsat na: $x^3 - 9x^2 + 8x + 60 = (x+2)P_2(x)$

polynom 2. řádu (kvadr.)

• Abychom našli $P_2(x)$, musíme kubickou funkci podělit $(x+2)$.

Dělení polynomů

tento algoritmus zapamatovat!

Postup:
1. dělím prvním členem
2. vynásobím dělitel výsledkem
3. otočím znaménka (resp. odčítám)
4. opakuji dokud je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele.

výsledek dělení $\frac{x^3}{x}$

krok 1

$$(x^3 - 9x^2 + 8x + 60) : (x+2) = \boxed{x^2 - 11x + 30}$$

$$-(x^3 + 2x^2)$$

krok 3

krok 2 vynásobím

$x^3 + 2x^2$

ODEČÍTÁM!

$$-11x^2 + 8x$$ krok 1 ....

$$-(-11x^2 - 22x)$$

$$30x + 60$$

$$-(30x + 60)$$

$$0$$

dělení beze zbytku

• Tzn. $x^3 - 9x^2 + 8x + 60$ lze rozložit na součin:

$$x^3 - 9x^2 + 8x + 60 = (x+2)(x^2 - 11x + 30)$$

$x^2 - 11x + 30$ rozložíme na kořenové činitele:

kořeny: $x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{2}$ < 6, 5

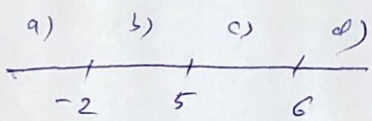
$x^2 - 11x + 30 = (x-6)(x-5)$, celkově:

$$\boxed{x^3 - 9x^2 + 8x + 60 = (x+2)(x-6)(x-5)}$$

Kořeny kubické rovnice jsou $x_1 = -2$, $x_2 = 6$, $x_3 = 5$
(a zároveň nulové body)

Q: Co kdybychom řešili nerovnici? $x^3 - 9x^2 + 8x + 60 \le 0$

– řešili bychom tabulkou:



4 intervaly

$(-\infty,-2)$	$(-2,5)$	$(5,6)$	$(6,+\infty)$	
−	+	+	+	$x+2$
−	−	+	+	$x-6$
−	−	−	+	$x-5$
−	+	−	+	Celková signatura

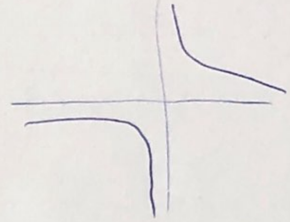
tyhle nás zajímají

Řešení je $x \in (-\infty,-2) \cup (5,6)$.

Z tohoto dělení lze i načrtnout graf kubické funkce. → průsečík s osou y $P_y = [0,60]$

Racionální lomená funkce

hyperbola $1/x$



„vodič"

- předpis:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

$P(x), Q(x)$ jsou polynomy

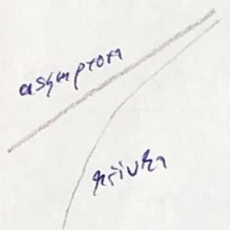
$Q(x) \neq 0 \rightarrow$ omezuje definiční obor

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{$ kořeny polynomu $Q(x) \}$

Připišme si:

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \text{ potom } \begin{cases} m<n: \text{ ryze lomená funkce} \\ m \geq n: \text{ neryze lomená funkce} \end{cases}$$

Zadefinujeme si pojem $\boxed{\text{asymptoty}}$, tj. přímka, jejíž vzdálenost od křivky, jíž je tzv. asymptotou, se limitně blíží nule.



můžete dál a dál „zoomovat"

- při šetření racionálních funkcí použijeme $\begin{cases} \text{vertikální asym. (VA)} \\ \text{horizontální asym. (HA)} \end{cases}$

Vertikální asymptoty: jsou dány kořeny polynomu $Q(x)$, tzv. nespojitostmi v definičním oboru

Q: Jak spočtu?

Horizontální asymptoty. Vyšetřujeme tři případy

Limita funkce $\lim_{x \to \pm\infty}$, nebo dělení polynomů ?!

- $m<n$: asymptota je $y=0$
- $m=n$: asymptota je podíl „vedoucích" koeficientů
- $m>n$: HA neexistuje, existuje však šikmá asymptota

Pozn: pokud se m a n liší o více než 2, existují i další asymptoty (př. kvadratické)

Určím-li asymptoty, najdu ještě průsečíky s osami

P_x: $y=0$ (dosadí)

P_y: $x=0$ (dosadí)

Pozn: odstranitelná nespojitost: vzorec $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$h(x)=\frac{x^2-4}{x^2+x-2}=\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{(x-1)\cancel{(x+2)}}=\frac{x-2}{x-1}$$

- v $x=-2$ je sice nespojitost a máme dojem, že je zde VA, ale vidíme, že se dal i čitatel rozložit takovým způsobem, že $(x+2)$ se pokrátilo.

Lineární lomená funkce

- speciální případ racionální lomené funkce,
  když $P = P_1(x)$ a $Q = Q_1(x)$

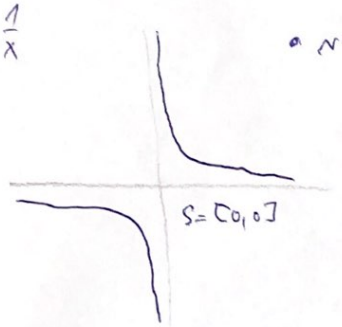
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

- $c \neq 0$ (jinak lineární funkce)
- $ad \neq cb$ (konstantní funkce)

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$

rozšiř $\frac{c}{c}$: $\frac{ax+b}{cx+d} \cdot \frac{c}{c} = \frac{cax + \overset{=ad}{cb}}{c^2x+cd} = \frac{a(cx+d)}{c(cx+d)} = \frac{a}{c} =$ číslo

$y(x) = \frac{1}{x}$



- všimněte si, že $y=0$ a $x=0$ jsou asymptoty → podívejte se na příklad asymptot a odůvodněte

$$\begin{cases} k>0: & \text{I., III. kvadrant} \\ k<0: & \text{II., IV. kvadrant} \end{cases}$$

Středový tvar: $y = y_s + \frac{k}{x-x_s}$ → jak ho získám? Dělení polynomů.

$S = [x_s, y_s]$

Asymptoty počítám, jak znám: VA … řešíme jmenovatel $= 0$ (tj. $-d/c$) $= x_s$

HA … podíl „vedoucích" členů (tj. a/c) $= y_s$

Př. $y = \frac{3x-5}{x-2}$

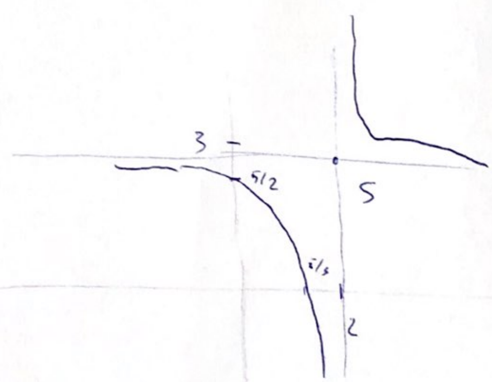
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$(3x-5):(x-2) = 3 + \frac{1}{x-2}$
$-(3x-6)$
1

$S = [2,3]$

Pozor na znaménko!

asymptoty:
$x_s = 2$
$y_s = 3$



Průsečíky: P_y: $x=0 \Rightarrow P_y = [0, 5/2]$
P_x: $y=0 \Rightarrow P_x = [5/3, 0]$