Vázané extrémy (Cvičení 11 a 12)

6.12.

↳ $f(x,y)$ extrémy vzhledem k nějaké předem dané podmínce

podmínka = vazba $g(x,y)$

Teorie: kompaktní množina = uzavřená a omezená

$M = \partial M + M^\circ$ (tj. hranice a vnitřek)

Weierstraß: spojitá fce nabývá na kompaktní množině svého max/min. (= globální extrémy fce f na množině)

Př. Jak bychom úlohy formulovat?

funkce více proměnných: „horský terén"
vazba: „cesta, vedoucí terénem"
vázaný (vázaný) extrém: „extrém na vazbě/cestě" ≠ globální/loc. extrém fce samotné

Metody: a) dosazovací
b) Lagrangeovy multiplikátory

Vazba: kompaktní množina → rovinný útvar → předpis
vzorcem předpis (kružnice $x^2+y^2=1$)

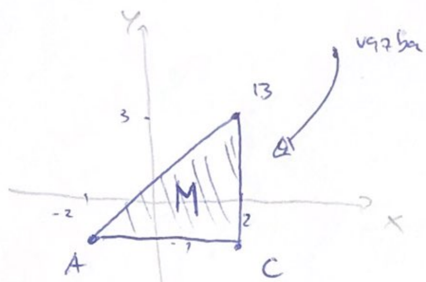
a) typicky rovinný útvar → strany parametrizujeme (dosadíme)

→ body v M°
→ body v ∂M (strany, vrcholy)

b) kuchařka na Lagrange.

Př. 1 $f(x,y) = x^2 + 4y^2$

na $M = \{ [-2,-1], [2,3], [2,-1] \}$



vazba na $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ (nejspíš paraboloid)

• extrémy a) vnitřní M°
b) hranice ∂M

a) nalezení klasický stacionární body

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \left.\begin{array}{l} 2x = 0 \quad (1) \\ 8y = 0 \quad (2) \end{array}\right\} \overset{\text{podmínka}}{\Rightarrow} [0,0] \text{ kandidát na extrém}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8y$$

b) hranice ∂M (strany)

• strana AC: $y = -1$ (konstantní funkce)

↳ dosadíme do $f(x,y)$: $f(x,-1) = x^2 + 4(-1)^2 = x^2 + 4 =: h_1(x)$
(1D fce)

extrém 1D fce: $h_1'(x) = 2x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$

$[0,-1]$ kandidát na extrém

• strana BC: $x = 2$

↳ dosadíme do $f(x,y)$: $f(2,y) = 4 + 4y^2 =: h_2(y)$
(1D fce)

extrém 1D fce: $h_2'(y) = 8y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y = 0$

$[2,0]$ kandidát na extrém

• strana AB: zde už se bude jednat o složitější parametrizaci

$[-\frac{4}{5}, \frac{1}{5}]$ kandidát na extrém

$[-2,-1]$ a $[2,3]$ → přímka $y = ax + b$

dosadíme do $f(x,y)$:

$$\begin{array}{l} -1 = -2a + b \\ 3 = 2a + b \\ \hline -4 = -4a \Rightarrow a = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} -1 = -2 + b \\ 1 = b \\ \boxed{y = x + 1} \end{array}$$

$f(x, x+1) = x^2 + 4(x+1)^2 =$
$= x^2 + 4x^2 + 8x + 4 = 5x^2 + 8x + 4 =: h_3(x)$

$h_3'(x) = 10x + 8 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = -4/5$

c) podívej se na hranice OM (vrcholy)

$[-2,1]$, $[2,-1]$, $[2,3]$ → kandidáti na extrém

d) porovnej funkční hodnoty ve všech kandidátech

$[0,0]$: $f(0,0) = 0$

$[2,0]$: $f(2,0) = 4$

$[0,-1]$: $f(0,-1) = 4$

$[-\frac{4}{5},\frac{1}{5}]$: $f(-\frac{4}{5},\frac{1}{5}) = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

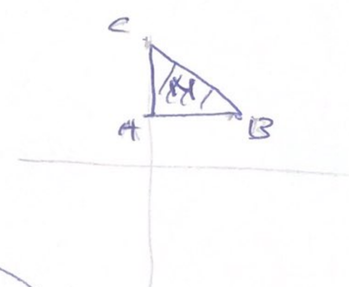
$[-2,1]$: $f(-2,1) = 4 + 4 = 8$

$[2,-1]$: $f(2,-1) = 4 + 4 = 8$

$[2,3]$: $f(2,3) = 4 + 36 = 40$

$[0,0]$: MINIMUM
$[2,3]$: MAXIMUM

Př. 2 (DÚ 6) $[0,2]$, $[4,2]$, $[0,6]$ trojúhelník



$f(x,y) = 4x^2 - 2xy + y^2 - 6y$

a) stacionární body uvnitř M° (tj. v M°)

$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 2y \overset{!}{=} 0 \quad (1)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2y - 6 \overset{!}{=} 0 \quad (2)$

$2y = 8x$
$y = 4x \quad y = 4$
$-2x + 8x - 6 = 0$
$x = 1$

$[1,4]$ stacionární bod kandidát.

b) strana AC: $x = 0$

$f(0,y) = y^2 - 6y =: h_1(y)$

$h_1'(y) = 2y - 6 = 0$
$y = 3$ $[0,3]$ kandidát

strana AB: $y = 2$

$f(x,2) = 4x^2 - 4x + 4 - 12$
$= 4x^2 - 4x - 8 =: h_2(x)$

$h_2'(x) = 8x - 4 = 0$
$x = \frac{1}{2}$

$[1/2, 2]$ kandidát.

strana CB: $\boxed{y = -x + 6}$

$y = ax + b$

$[4,2]$ a $[0,6]$

$\left.\begin{array}{l} 2 = 4a + b \\ 6 = b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 6 \end{array}$

→

$f(x, -x+6) = 4x^2 - 2x(-x+6) + (-x+6)^2 - 6(-x+6)$

$f(x, -x+6) = 4x^2 + 2x^2 - 12x + x^2 - 12x + \cancel{36} + 6x - \cancel{36}$

$f(x, -x+6) = 7x^2 - 18x =: g_3(x)$

$g_3'(x) = 14x - 18 = 0 \qquad x = 9/7 \qquad y = -\frac{9}{7} + 6 = \frac{-9+42}{7} = \frac{33}{7}$

$[9/7, 33/7]$ kandidát.

c) rohy: $[0,2], [4,2], [0,6]$ kandidáti

d) porovnej funkční hodnoty

$[0,2]: f(0,2) = 4 - 12 = -8$

$[4,2]: f(4,2) = 4 \cdot 16 - 2 \cdot 4 \cdot 2 + 4 - 12 = 40$

$[0,6]: f(0,6) = 36 - 36 = 0$

$[1,4]: f(1,4) = 4 - 8 + 16 - 24 = -12$

$[1/2, 2]: f(1/2, 2) = 4 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 + 4 - 12 = -8$

$[9/7, 33/7]: f(9/7, 33/7) =$

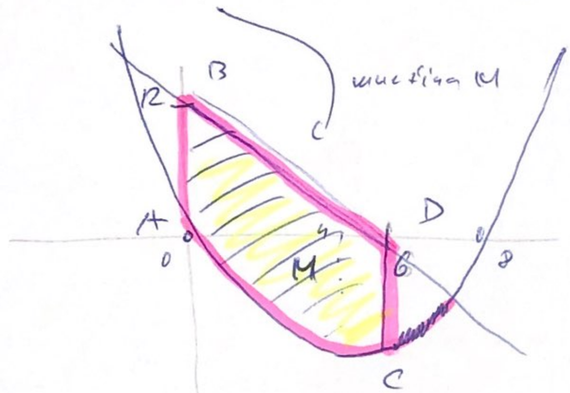
$[1,4]$ MINIMUM

$[4,2]$ MAXIMUM

DÚ 16: další příklady

Př. 3 $f(x,y) = 2x - y + 12$

na množině: $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 6,\ x^2 - 8x \le y \le 12 - 2x\}$



• $y = 12 - 2x = 0$

$12 = 2x \Rightarrow x = 6$

• $x^2 - 8x = y(x)$

$x(x-8) = y(x)$

dosazovací metoda lze aplikovat na hranice zadané předpisem (viz. lecture notes)

a) stacionární body v M°:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -1 \Rightarrow$ nemá řešení $\nexists$ stacionární body

b) hranice: AB: $x = 0$

$f(0,y) = -y + 12 = h_1(y)$ $h_1'(y) = -1 \neq 0$ $\emptyset$

hranice: CD: $x = 6$

$f(6,y) = 12 - y + 12 = -y + 24 := h_2(y)$ $h_2'(y) = -1 \neq 0$ $\emptyset$

hranice BD: $y = -2x + 12$

$f(x, -2x+12) = 2x + 2x - \cancel{12} + \cancel{12} = 4x = h_3(x)$ $h_3'(x) = 4 \neq 0$ $\emptyset$

hranice AC: $y = x^2 - 8x$

$f(x, x^2 - 8x) = 2x - x^2 + 8x + 12 = -x^2 + 10x + 12 =: h_4(x)$

$h_4'(x) = -2x + 10 = 0 \Rightarrow x = -5$ $[-5, -15]$ kandidát.

c) vrcholy $[0,0], [0,12], [6,0], [6,-12]$ kandidáti.

porovnej: $f(-5,-15) = 37$

$f(0,0) = 12$

$f(0,12) = 0$

$f(6,0) = 24$

$f(0,-12) = 2 \cdot 6 + 12 + 12 = 3 \cdot 12 = 36$

$[0,12]$ = MINIMUM

$[-5,-15]$ = MAXIMUM.