Cvičení 10 — 6.12.

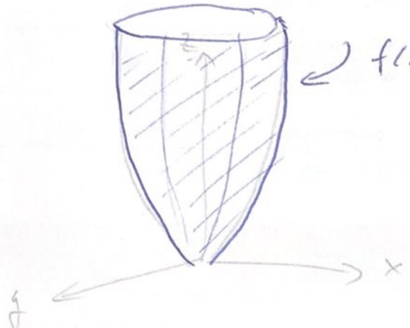
Funkce více proměnných: $z = f(x,y)$

2 proměnné

1D fce: $f(x) = z$

2D fce: $f(x,y) = z$ → grafem je plocha ve 3D prostoru

⋮



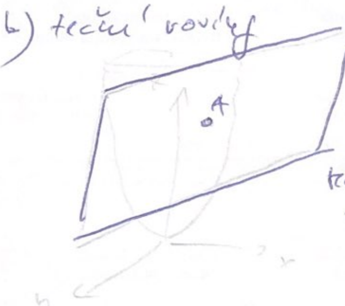
$f(x,y) = x^2 + y^2$

kartézský systém (x,y,z)

- funkce více proměnných mají též a) extrémy b) tečné roviny

extrémy: maximum/minimum

sedlové body (~ analogie inflexního bodu)



tečná rovina v bodě A.

- parciální derivace:

$\frac{\partial}{\partial x}$ ... „parciální derivace vzhledem k $\underline{x}$"

↳ $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ ... funkci $f(x,y)$ derivujeme vzhledem k x, ostatní proměnné se chovají jako konstanty

Př. 1 $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Př. 2 $f(x,y) = 2xy^2 - 4xy + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 - 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy - 4x + 2y$$

Klasifikaci stacionárních bodů (Hessova matice) dělat nebudeme, naučíme je se však hledat:

gradient

1D: $f'(x) = 0$

2D: $\nabla f(x,y) = \vec{0}$

$\boxed{\text{tj. } \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0}$

$\Longrightarrow$ stacionární bod

Př 3. Spočti parciální derivace a nalezni stacionární body:

$$f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 2y$$

stacionární bod: $2x + 3y = 0 \quad (1)$

$2y + 3x = 0 \quad (2)$

obecně získáme soustavu rovnic:

- vynásob (1) $-3/2$ a pak sečti

Metoda sčítací (řešení soustav rovnic) $\longrightarrow$

$$2x \cdot \left(-\tfrac{3}{2}\right) + 3y\left(-\tfrac{3}{2}\right) = 0$$

$$-3x - 9y/2 = 0 \quad (1)$$

$$3x + 2y = 0 \quad (2) \quad \oplus$$

$$0 - \tfrac{5}{2}y = 0 \Rightarrow y = 0$$

tzn. $x = 0$

$[0,0]$ stacionární bod

Př 4 $f(x,y) = xy\,e^{x - \frac{y^2}{2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{x - \frac{y^2}{2}} + e^{x - \frac{y^2}{2}} (1)\, xy = y(x+1)\, e^{x - \frac{y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{x - \frac{y^2}{2}} + e^{x - \frac{y^2}{2}} (-y) \cdot xy = x(1 - y^2)\, e^{x - \frac{y^2}{2}}$$

$$y(1+x)e^{x-\frac{y^2}{2}} = 0$$
$$x(1-y^2)e^{x-\frac{y^2}{2}} = 0$$
} podmínky na stacionární body

$e^{x-\frac{y^2}{2}} > 0 \ \forall x,y$, můžeme jí vydělit.

$y(1+x) = 0 \quad (1)$

$x(1-y^2) = 0 \quad (2)$

(1) splněna, když $y=0$, potom $x\cdot(1-0)=0$, $x=0$ → $[0,0]$ stacionární bod

(1) splněna, když $x=-1$, potom
$-1\cdot(1-y^2)=0$
$-1+y^2=0$
$y^2=1$
$y_{1,2}=\pm 1$
→ $[-1,1]$, $[-1,-1]$ stacionární body

Celkově:
$[0,0], [-1,1], [-1,1]$.

Př. 5 $f(x,y) = x^2+y^2+y-2x$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x-2$ $\qquad 2x-2=0 \quad (1)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y-1$ $\qquad 2y-1=0 \quad (2)$

$[1,\frac{1}{2}]$ stacionární bod

Př. 6 $f(x,y,z) = x\cancel{^2}y - 2xz + 3yz + 7x - 15y + 3z$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2z + 7 \overset{!}{=} 0 \quad (1)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 3z - 15 \overset{!}{=} 0 \quad (2)$

$\frac{\partial f}{\partial z} = -2x + 3y + 3 \overset{!}{=} 0 \quad (3)$

~~vyjádří $y = 2z-7$ z (1), dosadí do (2):~~
~~$x - 2z + 6z - 21 - 15 = 0$~~
~~$x + 4z - 36 = 0$~~
~~vyjádří: $x = 36 - 4z$ z (2), dosadí do (3):~~
~~$-2\cdot(36-4z) + 3\cdot(2z-7) + 3 = 0$~~
~~$-72 + 8z + 6z - 21 + 3 = 0$~~
$-72 + 14z - 18 = 0$
$z =$

příliš mnoho dosazování

(vyjádři y z (1), dosaď do (3) a pod.)