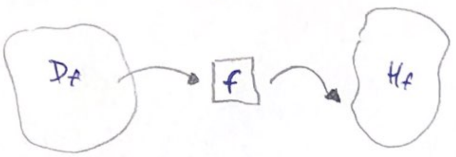
Cvičení 1 (Základy funkcí)

20.9.22

Funkce f: $y = f(x)$

↳ objekt přiřazující číslům z D_f čísla z H_f.



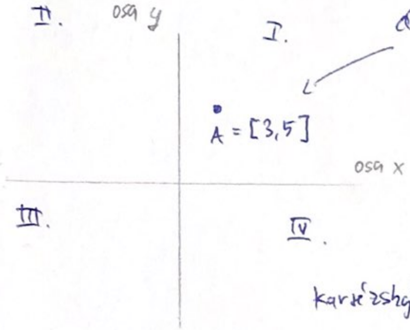
definiční obor funkce (vstup)

obor hodnot funkce (výstup)

- předpis $y(x) = x^2$
  $f(x) = x^2$
- graficky: křivka / izolované body

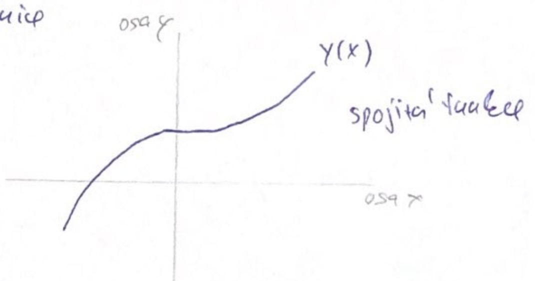
D_f, H_f jsou libovolné množiny ($\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \{3,5\}, \dots$).

Typicky se budeme zabývat případy, kdy $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



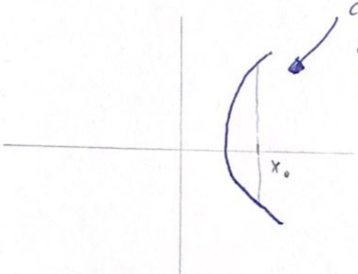
do KS zakreslujeme i body, jejich souřadnice jsou vždy $[x, y]$.

kartézský (xy) systém (KS)



spojitá funkce

Q: Co funkce není?



číslu x_0 odpovídají dvě funkční hodnoty (více bodům x může však odpovídat stejná funkční hodnota)

Lineární funkce

- křivka této funkce je přímka
- obecně dána předpisem

$$y = ax + b \qquad D_f = \mathbb{R}$$

a .... směrnice

b .... absolutní člen

Př. Nakreslete graf funkce $y(x) = 1 - 2x$.

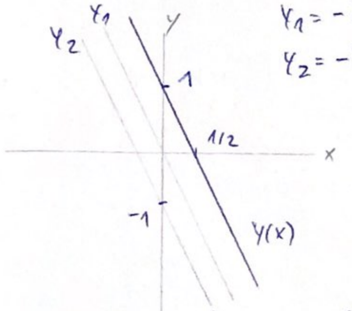
Spočítáme průsečíky, vidíme:

$b = 1$

$a = -2$

$P_y = [0, 1]$

$P_x = [1/2, 0]$



$y_1 = -2x$

$y_2 = -2x - 1$

↳ koeficient b pouze šoupe na osy y.

Q: Jak nakreslit přímku, znám-li předpis?

Znám-li dva body, přímku můžu vždy nakreslit, potřebuji význačné body.

↳ typicky průsečíky s osami

Průsečík s osou x: polož $y = 0$ (P_x)

Průsečík s osou y: polož $x = 0$. (P_y)

P_y: $y = b \rightarrow P_y = [0, b]$

P_x: $y = 0 = ax + b$

$x = -b/a \rightarrow P_x = [-b/a, 0]$.

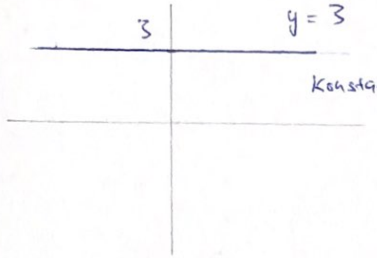
Dle znaménka směrnice rozlišujeme:

$$a \begin{cases} a < 0: \text{rostoucí funkce} \\ a > 0: \text{klesající funkce} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_y &= [0, b] \\ P_x &= [-b/a, 0] \end{aligned}}$$

Speciální případy:

- $a = 0$ tj. $y(x) = b$ (= číslo)

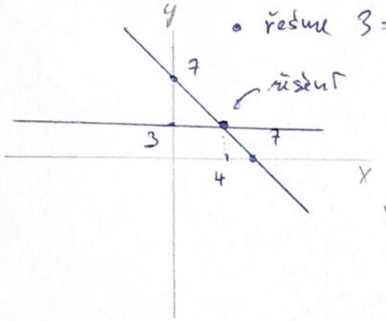


Konstantní funkce

- $b = 0$ tj. $y(x) = ax$
přímka prochází bodem [0,0] (počátkem), mluvíme o přímé úměře

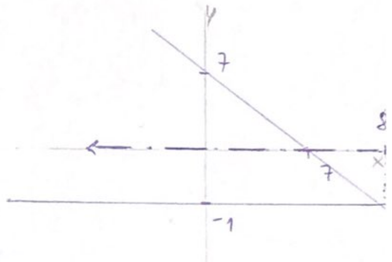
Čím větší směrnice, tím je přímka strmější.

Grafické řešení (ne)rovnic



- řešme $3 = -x + 7$ graficky, hledáme, kde se funkce
$y_1 = -x + 7$ a
$y_2 = 3$,
rovnají → hledáme jejich průsečík.

- řešme $-1 < -x + 7$



graficky vidíme, že nerovnost platí pro $x \in (-\infty, 8)$.

Př. Přímka prochází body $C = [-2, -1]$, $D = [7, 2]$. Určete předpis lineární funkce.

Dosadíme souřadnice bodů do předpisu lin. funkce $y = ax + b$

$$\begin{aligned} -1 &= -2a + b \quad (1) \\ 2 &= 7a + b \quad (2) \end{aligned} \Big\} \ominus$$

tj. soustava dvou lin. rovnic, řešíme metodou sčítání

$$-3 = -9a \rightarrow a = 1/3$$

$$-1 = -\frac{2}{3} + b \rightarrow b = -1/3$$

$$y(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Kvadratické funkce

- křivkou je parabola
- dána předpisem

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

$a \neq 0$
$D_f = \mathbb{R}$

kvadratický člen

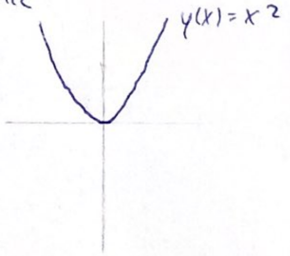
lineární člen

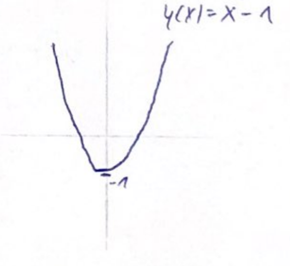
absolutní člen

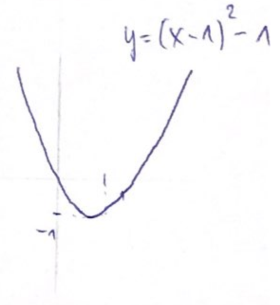
alternativou představuje tzv. „vrcholový tvar"

$$y(x) = (x + m)^2 + n$$

vrchol paraboly je pak dán $V = [-m, n]$, na vrcholový tvar však nejdříve musíme kvadratickou funkci převést.







- absolutní člen (v obou vyjádřeních) hýbe opět pouze s pozicí na ose y (určuje P_y).
- koeficient b šoupe do vpravo/vlevo

- koeficient a :

$$a \begin{cases} a < 0 : \text{konkávní} & \cap \\ a > 0 : \text{konvexní} & \cup \end{cases}$$

Pozn. do „konkáv" tvaru nenalezneš?

vrchol je vždy extrémem (tj. minimum/maximum)

Q: Jak nakreslit z předpisu parabolu?

Budeme potřebovat význačné body (P_y, $P_{x_{1,2}}$, V)

$P_y = [0, c]$ je daný absolutním členem.

$P_{x_{1,2}}$ nalezneme řešení kvadratické rovnice.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad D := b^2 - 4ac$$

(diskriminant)

$D > 0$: 2x jednonásobný kořen

$D = 0$: 1x dvojnásobný kořen

$D < 0$: ∅ (nemá průsečík)

Př. Naleznete kořeny $x^2 - 2x - 8$.

$a = 1$

$b = -2$

$c = -8$

$$x_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4+32}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} \left\langle \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix} \right.$$

$P_y = [0, -8]$

$P_{x_1} = [4, 0]$

$P_{x_2} = [-2, 0]$

$P_{x_{1,2}} = [x_{1,2}, 0]$

Diskriminant funguje vždy, občas se dají použít Vietovy vzorce (VV).

$$\boxed{\begin{matrix} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{matrix} \quad (VV)}$$

rozklad na kořenové činitele

$$0 = (x - x_1)(x - x_2)$$

používejte, když $a = 1$ (nebo a-čkem podělte), hledáme takové kořeny, jejichž součet je $\underline{-b}$, a součin $\underline{c}$

Př. Použijte (VV) na předchozí kvadratickou funkci.

$b = -2$

$c = -8$

vidíme, že pro $x_1 = 4$, $x_2 = -2$ máme: $x_1 + x_2 = +2$ $(-(-2) = +2)$ sedí. ✓

$x_1 \cdot x_2 = -8$ (sedí). ✓

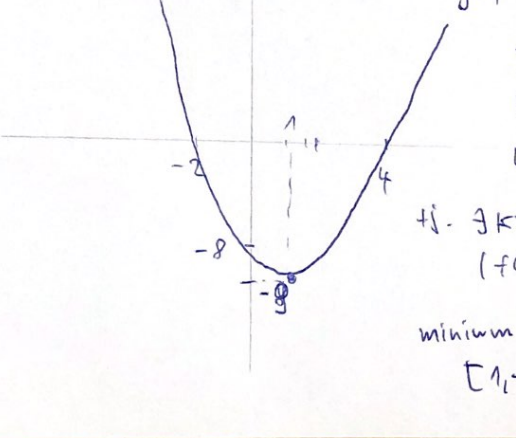
Q: Jak nalézt vrchol paraboly?

- vrcholový tvar
- vzorec:

$$V = \left[-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c \right]$$

vrchol pro parabolu z předchozího příkladu:

$V = [1, -9]$



$D_f = \mathbb{R}$

$H_f = (-9, +\infty)$

omezená zdola

tj. $\exists k > 0: |f(x)| < 0$.

minimum v bodě $[1, -9]$

Doplnění na čtverec:

převod ax^2+bx+c na $(x+m)^2+n$

$$a \begin{cases} a=1 \\ a\neq 1 : \text{vydělím} \end{cases}$$

Př. x^2-6x+5 doplňte na čtverec

Krok 1: $(x^2-6x+\square)-\square+5$

přičtení „chytré nuly"

Krok 2: na část v závorce použiji vzorec $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$a^2=x^2 \longrightarrow a=x$ a dosadím níže

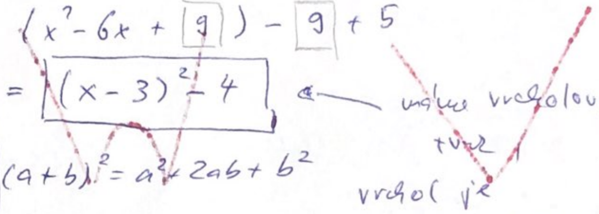
$2ab=-6x \longrightarrow 2xb=-6x$

$b=-3$

Z toho pak $b^2=9$ a $b^2=\square$.

$(x^2-6x+\boxed{9})-\boxed{9}+5$

$=\boxed{(x-3)^2-4}$ ← máme vrcholový tvar!



vrchol je v bodě $[3,-4]$.

Př. Pro $y(x)=x^2+6x+8$ spočítejte průsečíky s osami a nalezněte vrchol.

$P_y=[0,8]$

řeším kvadratickou rovnici:

$x^2+6x+8=0$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-32}}{2} \begin{cases} \frac{-6+2}{2}=-4 \\ \frac{-6-2}{2}=-2 \end{cases}$$

$P_{x_1}=[-4,0]$

$P_{x_2}=[-2,0]$

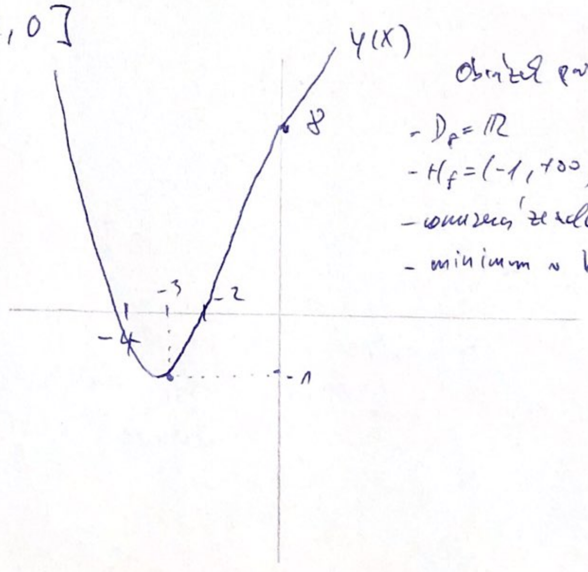
doplníme na čtverec:

$x^2+6x+8=(x^2+6x+\boxed{9})-\boxed{9}+8$

$$\left.\begin{matrix} x^2=a^2 \\ 2ab=6x \end{matrix}\right\} \begin{matrix} a=x \\ b=3 \end{matrix} =(x+3)^2-1$$

máme ve vrcholovém tvaru

$V=[-m,n]$ tj. $V=[-3,-1]$



Obrázek paraboly

- $D_f=\mathbb{R}$
- $H_f=(-1,+\infty)$
- omezená zdola
- minimum v bodě $[-3,-1]$.

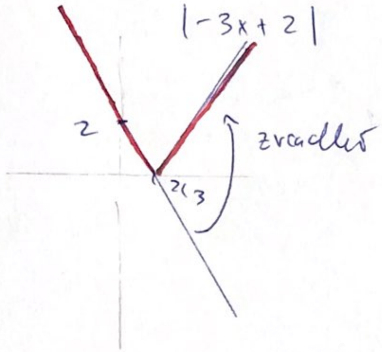
Funkce s absolutní hodnotou

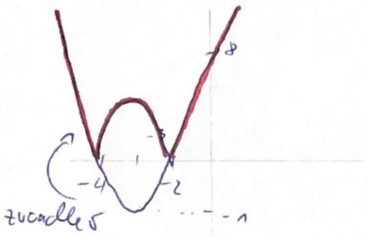
Definice:

$$|x| \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Funkce v absolutní hodnotě je nezáporná, jestliže je funkce v absolutní hodnotě celá, lze její nezápornou část jednoduše ozrcadlit.

Př. Nakreslete $|-3x+2|$ a $|x^2+6x+8|$.

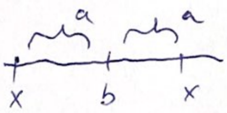




Rovnice s absolutní hodnotou

$|x|=1$ má řešení $\{\pm 1\}$

obecně: $|x-b|=a$ tj. jaká x splňují, že vzdálenost od čísla b je a

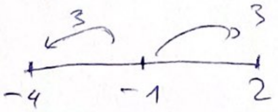


tzv. geometrická interpretace

Př. Řešte $|x+1|=3$

$|x-(-1)|=3$

upravím do tvaru $|x-b|=a$

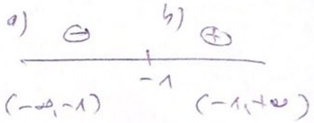


čísla $\{-4, 2\}$ mají vzdálenost 3 od čísla (-1).

obecně řešíme nulovými body

(tj. tam, kde je výraz nulový)

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$



- nulový bod rozdělí osu na dva podintervaly

viz. definice a) $\ominus(x+1)=3$

$-x-1=3$

$-x=4$

$x=-4$

$x \in (-\infty,-1)$ ✓

b) $x+1=3$

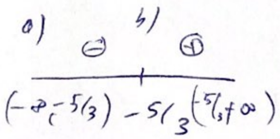
$x=2$

$x \in (-1,+\infty)$ ✓

$x=\{-4, 2\}$

Př. Řešte $|3x+5|=8$

nulový bod je $x=-5/3$



a) $-3x-5=8$

$x=-13/3 \in (-\infty,-5/3)$ ✓

b) $3x+5=8$

$x=1 \in (-5/3,+\infty)$ ✓

$x=\{-13/3, 1\}$.

vždy ověřte, že nalezené řešení patří do příslušného intervalu.